

PROGRAMME NATIONAL SUR L'ENVIRONNEMENT PHYSIQUE ET BIOLOGIQUE

Pollution des Eaux

Projet Mer

Modèle mathématique
de l'estuaire de l'Escaut

par

Ph. JÄGER *

N 19

* Ph. JÄGER

Unité de Géophysique
Université de Louvain

Introduction

Au départ, notre but était l'établissement d'un modèle représentant le mouvement des suspensions dans l'estuaire de l'Escaut. Comme les concentrations des matières en suspension sont liées au champ des vitesses et comme le profil vertical des vitesses dans l'estuaire de l'Escaut subit de grandes déformations au cours d'une marée, il s'est avéré nécessaire d'étudier en premier lieu le champ des vitesses et plus particulièrement ses variations verticales.

Contrairement à ce qui a lieu en mer, la masse volumique de l'eau varie, de celle de l'eau douce en amont à celle de l'eau de mer à l'embouchure; le champ des vitesses et la salinité se trouvent donc liés. Nous sommes donc conduit à résoudre un système d'équations simultanées décrivant l'évolution des vitesses et l'évolution de la masse volumique de l'eau au cours du temps.

1.- Généralités sur les modèles d'estuaires

Nous devons exclure les modèles réduits qui ne représentent que l'écoulement moyen dans l'estuaire et ne permettent pas de connaître les gradients verticaux des différents paramètres. Nous allons donc utiliser un modèle mathématique.

Tous les modèles existants ont pour base les équations générales de conservation des moments et de conservation de la masse.

Si on appelle \mathbf{v} le vecteur vitesse de l'eau, p la pression, \mathbf{g} l'accélération de la pesanteur et $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur rotation de la terre, les équations s'écriront (si on néglige la diffusion moléculaire) [Nihoul (1972)]

$$(1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} - 2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}$$

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_a \mathbf{v} = Q_a - \nabla \cdot \mathbf{m}_a + \sum_{\beta=1}^s P_{a\beta}$$

où ρ_a est la concentration de l'élément a dans l'eau, Q_a représente

les sources externes de α , m_α est le vecteur migration de l'élément α , $P_{\alpha\beta}$ est la vitesse de production ou de destruction de α par voie chimique ou biologique.

L'élément α qui nous intéresse ici est le sel : nous désignerons par ρ_N la concentration en sel dans l'eau. Nous négligerons les sources externes, les migrations et les sources internes de sel, soit

$$Q_N = \nabla \cdot \mathbf{m}_N = R_{N\beta} = 0.$$

Nous appellerons v_1 , v_2 et v_3 les trois composantes du vecteur \mathbf{v} : v_1 suivant l'axe de coordonnée x_1 (parallèle à l'écoulement, de l'aval vers l'amont); v_2 suivant l'axe de coordonnée x_2 (perpendiculaire à l'écoulement suivant l'horizontale); v_3 suivant l'axe de coordonnée x_3 (dirigé de haut en bas).

Si nous appliquons la méthode de K.B.M. [Nihoul (1972)] et si nous représentons les valeurs moyennes par des lettres surlignées, alors, notre système d'équation s'écrira :

1) Equations pour le champ de vitesse

Si v_1 , v_2 , v_3 représentent respectivement les viscosités turbulentes suivant x_1 , x_2 , x_3 et si f est le paramètre de Coriolis, les équations décrivant le champ de vitesse dans un estuaire s'écrivent, en explicitant (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} - f \bar{v}_2 \\ = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} + f \bar{v}_1 \\ = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} \\ = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} \end{aligned}$$

2) Equation de continuité

On peut montrer [Nihoul (1970)] que, malgré les déplacements de sel et la stratification qui font varier la masse spécifique ρ , l'équation (2) peut, avec une excellente approximation, se mettre sous la forme simple

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} = 0$$

3) Equation de conservation de la masse de sel

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ représentent les diffusivités turbulentes, l'équation de conservation de la masse de sel s'écrit, en explicitant (3),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} + \bar{v}_2 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_2} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3} \\ = \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_1 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \lambda_2 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3} \end{aligned}$$

4) Equation de conservation de la masse totale

Si on néglige les masses par unité de volume des corps présents dans l'eau, autres que le sel, on a — en tout point — la relation :

$$\bar{\rho} = \rho_0 + \bar{\rho}_N$$

où ρ_0 est la masse volumique constante de l'eau douce.

De nombreux modèles d'estuaires ont été réalisés qui négligent un certain nombre de termes de ces équations. Les simplifications apportées sont variables selon les auteurs du fait que chacun d'eux se place, pour plus de commodité, dans un cas particulier. D'après Bowden (1967), on peut en effet classer les estuaires en trois grandes catégories :

- *les estuaires parfaitement stratifiés.*

Dans ce type d'écoulement, les phénomènes de mélange n'ont lieu qu'à l'échelle moléculaire et sont donc négligeables.

- *les estuaires parfaitement mélangés.*

Il n'existe pas, dans les estuaires parfaitement mélangés, de gradient vertical de salinité; par contre, les phénomènes de mélanges turbulents deviennent prépondérants.

- les estuaires partiellement mélangés.

Ce type d'estuaire est le plus complexe et ne permet pas, *a priori*, de négliger ni les gradients de salinité, ni les phénomènes de mélanges turbulents.

On conçoit aisément que les équations décrivant les deux premiers types d'estuaires peuvent recevoir des simplifications suffisantes permettant de traiter des systèmes relativement simples à résoudre. Malheureusement, l'Escaut appartient à la troisième catégorie, celle des estuaires mélangés.

En conséquence, nous ne pouvons, ni utiliser des équations où l'on aurait négligé *a priori* certains termes, ni nous contenter d'un modèle à une dimension, car il nous est nécessaire de connaître les gradients verticaux pour aborder les phénomènes de sédimentation (existence d'un vecteur de migration).

Nous sommes ainsi conduit à examiner, pour le cas de l'Escaut, quels sont les termes qui pourraient être négligés.

2.- Equations générales pour l'Escaut

2.1.- Modèle bidimensionnel

Etant donné l'importance que revêtent pour nous les variations verticales des paramètres, nous conserverons un modèle à deux dimensions : l'une suivant l'axe de l'écoulement, l'autre suivant la profondeur.

Nous négligerons, *a priori*, les variations latérales des paramètres, c'est-à-dire que nous posons :

$$\bar{v}_2 = 0 ,$$

la nullité de toutes les dérivées par rapport à x_2 .

Nous examinerons ultérieurement la validité de cette hypothèse.

Le modèle à deux dimensions s'écrit donc

$$(4a) \quad \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3}$$

$$(4b) \quad \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3}$$

$$(5) \quad \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} = 0$$

$$(6) \quad \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_1 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3}$$

$$(7) \quad \bar{\rho} = \rho_0 + \bar{\rho}_N$$

Nous allons examiner à présent, à la lumière des mesures expérimentales connues, l'ordre de grandeur de chacun des termes afin de tenter d'évaluer ceux qui seraient dans une même équation toujours négligeables.

2.2.- Ordre de grandeur des différents termes

Toutes les valeurs que nous avons utilisées sont empruntées à l'ouvrage publié par le Ministère des Travaux publics : *Stormvloed en op de Schelde* (1966).

Nous nous intéresserons seulement à la valeur maximum des termes puisque le but est d'éliminer les termes *toujours* très petits devant les autres. Nous nous exprimerons dans le système MKS .

1) Examen de la vitesse \bar{v}_1 dans la direction de l'écoulement

Cette vitesse varie au maximum de $- 1,4 \text{ m/s}$ à $+ 1,4 \text{ m/s}$, soit

$$|\bar{v}_1| \sim 1 \text{ m/s} .$$

Un examen des courbes de vitesses dans le temps indique que \bar{v}_1 passe au maximum de 0 à 1 m/s en 1 h 30 , ceci en un point donné; par suite

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} \sim \frac{1}{5400} \sim 10^{-4} \text{ m/s}^2 .$$

Un examen analogue conduit à constater une variation, à un instant donné, de 0 à 1,4 m/s en se déplaçant de 2 à 92 km de l'embouchure, cette variation restant régulière sur toute cette distance; par suite

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} \sim \frac{1,4}{90000} \sim 10^{-5} \text{ s}^{-1} .$$

Enfin, \bar{v}_1 prend toujours la valeur 0 au fond et sensiblement sa valeur maximum en surface. Par suite, \bar{v}_1 peut varier de 0 m/s au fond à 1,4 m/s en surface; la profondeur étant d'environ 10 m , on peut écrire :

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \sim \frac{1,4}{10} \sim 10^{-1} \text{ s}^{-1}.$$

2) Examen de la vitesse verticale \bar{v}_3

La vitesse verticale est maximum en surface. On définit ζ comme l'abscisse suivant x_3 de la surface libre prise par rapport à un plan fixe de référence $x_3 = 0$.

La vitesse de déplacement de la surface libre $\frac{d\zeta}{dt}$ est égale à la vitesse verticale à la surface libre de l'eau $[v_3]_{x_3=\zeta}$.
Par suite [Nihoul (1972)],

$$(8) \quad [v_3]_{x_3=\zeta} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1}.$$

L'ouvrage des Travaux publics nous montre que ζ varie au maximum de 1,1 m en une heure, soit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \sim \frac{1,1}{3600} \sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}.$$

A un instant donné, les variations les plus importantes des niveaux d'eau sont de 0,6 m en 20 km, soit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} \sim \frac{0,6}{2 \cdot 10^4} \sim 3 \cdot 10^{-5} \text{ (sans dimension)}.$$

En appliquant l'équation (8), nous obtenons donc l'évaluation de la vitesse verticale maximum \bar{v}_3 :

$$\bar{v}_3 \sim 3 \cdot 10^{-4} + (1,4 \times 3 \cdot 10^{-5}) \sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}.$$

Nous en déduisons alors que

a) à un instant donné, puisque \bar{v}_3 croît au maximum de 0 à 10^{-4} m/s en 20 km,

$$\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} \sim \frac{10^{-4}}{2 \cdot 10^4} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1};$$

b) la variation la plus rapide de \bar{v}_3 en un point donné existe lorsque la vitesse verticale passe de la valeur 0 à la valeur $3 \cdot 10^{-4}$ m/s en 0,5 h, par suite

$$\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial t} \sim \frac{3 \cdot 10^{-4}}{1800} \sim 3 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2;$$

c) la vitesse verticale s'annule au fond, elle est par contre maximum en surface; puisque la profondeur est de l'ordre de 10 m, nous aurons :

$$\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} \sim \frac{3 \cdot 10^{-4}}{10} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

3) Examen de la concentration en sel $\bar{\rho}_N$

La concentration en sel varie de 0 à 30 kg/m³ de l'amont à l'aval de l'estuaire (soit 0 pour l'eau douce et 30 kg/m³ en mer du Nord).

Les premiers résultats des campagnes de mesures semblent indiquer qu'il existe un gradient de salinité entre la surface et le fond de l'ordre de 1 kg/m³ :

$$\frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3} \sim \frac{1}{10} = 10^{-1} \text{ kg.m}^{-4}.$$

Par ailleurs, les fluctuations en un même point sont maximum au cours d'une marée, c'est-à-dire dans un espace de temps d'environ $2 \cdot 10^4$ s. D'après l'article de Codde (1968), cette variation de concentration en sel est de l'ordre de 10 kg/m³. Par suite

$$\frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial t} \sim \frac{10}{2 \cdot 10^4} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3 \cdot \text{s}.$$

Les courbes données par le même auteur indiquent que la variation suivant l'écoulement est maximum au milieu de notre zone d'étude. Cette variation est majorée par un écart de 10 kg/m³ sur une distance de 16 km. Par suite,

$$\frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} \sim \frac{10}{1,6 \cdot 10^4} \sim 6 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^4.$$

On constate que sur les 33 premiers kilomètres à l'amont comptés à partir du point de rejet du Rupel, $\frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1}$ passe de la valeur 0 à $6 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^4$; par suite,

$$\frac{\partial^2 \bar{\rho}_N}{\partial x_1^2} \sim \frac{6 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^4} \sim 10^{-8} \text{ kg/m}^5.$$

4) Examen des valeurs maximums des autres paramètres

Les valeurs que nous indiquerons sont celles couramment admises. Nous les avons en particulier empruntées à l'article de Bowden (1967).

a) Les viscosités turbulentes ν_1 et ν_3

D'après Bowden (1967), on peut admettre les ordres de grandeur suivants pour les viscosités turbulentes :

$$\nu_1 \sim 10^2 \text{ m}^2/\text{s} \quad \text{et} \quad \nu_3 \sim 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s} .$$

b) Les coefficients de diffusion turbulente λ_1 et λ_3

Bowden (1967) indique une relation empirique simple reliant les coefficients de diffusion turbulente et les viscosités turbulentes dans un estuaire :

$$\nu_1 \sim 2 \lambda_1 \quad \text{et} \quad \nu_3 \sim 2 \lambda_3 .$$

Les coefficients de diffusion turbulente seront donc du même ordre de grandeur que les viscosités turbulentes correspondantes, soit

$$\lambda_1 \sim 10^2 \text{ m}^2/\text{s} \quad \text{et} \quad \lambda_3 \sim 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s} .$$

c) L'accélération de la pesanteur

Si nous définissons x_3 croissant du bas vers le haut, alors

$$g \sim 10 \text{ m/s}^2 .$$

d) La densité de l'eau douce

$$\rho_0 \sim 10^3 \text{ kg/m}^3 .$$

3.- Simplification des équations générales dans le cas de l'Escaut

Nous allons examiner chaque équation successivement.

3.1.- Simplification de la loi de conservation des moments suivant x_3

La loi de conservation des moments suivant la verticale s'écrit

$$(4b) \quad \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \nu_1 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \nu_3 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3}$$

$10^{-7} \qquad 10^{-8} \qquad 10^{-8} \qquad 10 \qquad 10^{-11} \qquad 10^{-9}$

Nous avons indiqué en dessous de chaque terme son ordre de grandeur calculé à partir du paragraphe précédent. Nous constatons que tous les termes

sont négligeables devant g sauf $\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3}$ qui devra nécessairement être de l'ordre de grandeur de g ; par suite, l'équation se réduit à

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} = g .$$

Si on intègre cette équation d'une profondeur quelconque jusqu'à la surface ($x_3 = \zeta$), nous obtenons

$$[\bar{p}]_{x_3=\zeta} - \bar{p} = g \int_{x_3}^{\zeta} \bar{\rho} dx_3$$

mais, à la surface, la pression dans l'eau est nécessairement égale à la pression atmosphérique p_a , d'où

$$\bar{p} = p_a - g \int_{x_3}^{\zeta} \bar{\rho} dx_3$$

Par suite, en dérivant par rapport à x_1 , on obtient

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} = \frac{\partial p_a}{\partial x_1} - g \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{x_3}^{\zeta} \bar{\rho} dx_3 = - g \int_{x_3}^{\zeta} \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} dx_3 - g \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} [\bar{\rho}]_{x_3=\zeta}$$

cette dernière égalité restant vraie si la pression atmosphérique reste constante le long de x_1 .

Nous avons ainsi une nouvelle expression du terme $\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}$ qui nous permet d'éliminer la pression dans l'équation (4a).

3.2.- Simplification de la loi de conservation des moments suivant x_1

En introduisant la valeur de $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}$ trouvée précédemment, l'équation (4a) s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} & + & \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} & + & \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} & = & \frac{g}{\bar{\rho}} \int_{x_3}^{\zeta} \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} dx_3 + g \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \\ 10^{-4} & & 10^{-5} & & 10^{-5} & & 10^{-5} \quad 10^{-4} \quad 10^{-8} \quad 10^{-5} \end{array}$$

On constate que seul le terme exprimant la diffusion turbulente suivant x_1 est négligeable (il est 10^{-3} fois plus petit que les autres).

L'équation (4a) pourra donc se réduire à :

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} = \frac{g}{\bar{\rho}} \int_{x_3}^{\zeta} \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} dx_3 + g \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3}$$

3.3.- Simplification de l'équation de continuité

L'équation de continuité s'écrit

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial x_3} = 0 .$$

Les deux termes de l'équation sont malheureusement du même ordre de grandeur (10^{-5} s^{-1}). Cette relation n'est donc pas simplifiable.

3.4.- Simplification de l'équation de conservation de la masse du sel

Il s'agit de l'équation (6), soit :

$$\frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_1 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3}$$

$10^{-3} \qquad 10^{-3} \qquad 10^{-5} \qquad 10^{-6} \qquad 10^{-5}$

Les termes $\frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial t}$ et $\bar{v}_1 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1}$ sont de signe contraire. On constate que le terme de diffusion turbulente suivant x_1 est le plus petit, mais il ne l'est pas suffisamment pour pouvoir être négligé avec prudence. Dans un premier temps, l'équation (6) restera donc sous sa forme complète.

4.- Conclusion sur les simplifications apportées

Dans aucune des équations, nous n'avons pu négliger les termes de convection et de diffusion suivant la verticale. Ce résultat est en opposition avec de nombreux modèles qui ne considèrent que la diffusion suivant x_1 [Bowden (1967), Feigner et Harris (1970), Carter et Okubo (1970), Harleman (1971)]. Il est à remarquer que l'emploi d'un modèle à une dimension entraîne souvent une incertitude très grande sur la valeur du coefficient global de diffusion turbulente. Carter et Okubo (1970) déterminent à partir de deux expériences des valeurs de λ_1 respectivement de $2 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/\text{s}$ et $10^6 \text{ cm}^2/\text{s}$. Feigner et Harris (1970) arrivent à la conclusion surprenante que, s'ils font varier leur coefficient de diffusion turbulente d'une première valeur à une valeur cent fois plus grande, cela n'a pas d'influence sur leurs résultats.

Ces résultats assez contradictoires obtenus à partir des modèles à une dimension viennent probablement du fait que l'intégration effectuée

sur la profondeur a défini un nouveau coefficient "global" de diffusion. Ce coefficient peut suivre des lois très différentes de celles du coefficient originel de diffusion turbulente. En effet, tous ces auteurs écrivent :

$$\frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_1 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_1} dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} \Lambda_1 \frac{\partial \bar{\rho}_{\text{moyen}}}{\partial x_1}$$

Le nouveau coefficient Λ_1 ne serait égal à λ_1 que si h et ζ ne dépendaient pas de x_1 et si λ_1 ne dépendait pas de z .

D'autres modèles ne considèrent que les variations suivant x_1 et x_2 [Ramming (1971), Bowden (1967) et Pritchard (1969, 1971)]. Nous nous sommes enquis auprès de Ramming de la raison pour laquelle il négligeait le gradient de salinité dans son modèle de l'estuaire de l'Elbe. En fait, il s'agit là d'une première approche du problème car, dans l'Elbe, l'ordre de grandeur des variations de salinité est identique à celui dans l'Escaut. En ce qui nous concerne, nous préférons négliger les variations latérales qu'explique Ramming (1971) au profit des variations verticales car elles ont une grande influence sur le phénomène de sédimentation.

5.- Les conditions aux limites

Les limites de notre domaine sont :

- les berges;
- la surface et le fond;
- les sections au niveau du Rupel et à l'embouchure.

Examinons-les successivement.

5.1.- Conditions aux limites sur les berges

Nous avons supposé qu'il n'existe pas de variation des paramètres sur la largeur. Il nous sera donc facile d'intégrer nos équations sur la largeur de l'Escaut. A cet effet, nous prendrons les conditions aux limites suivantes :

- a) sur les berges, les vitesses \bar{v}_1 et \bar{v}_3 sont nulles;
- b) sur les berges, les concentrations en sel restent constantes, soit

$$\bar{\rho}_N(x_1, x_2, x_3) = \bar{\rho}_N(x_1, \pm \frac{L}{2}, x_3)$$

$\frac{l}{2}$ représentant la demi-largeur de l'Escaut au point de coordonnées (x_1, x_3) .
Nous supposons qu'il y a symétrie autour de l'axe des x_1 dans le plan horizontal.

5.1.1.- Intégration sur la largeur de l'équation de conservation des moments

L'équation (4a) intégrée sur la largeur s'écrit :

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \left(\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \right) dx_2 = \int_{-l/2}^{+l/2} \left\{ \frac{g}{\rho} \int_{x_3}^{\xi} \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3} dx_3 + g \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \right\} dx_2$$

En utilisant la relation :

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha} dy = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f dy + \frac{\partial b}{\partial \alpha} f(b) - \frac{\partial a}{\partial \alpha} f(a)$$

où f représente une fonction quelconque. Nous obtenons, à l'aide des conditions aux limites sur les berges définies précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_1 l}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1 l}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_1 l}{\partial x_3} &= l g \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{l g}{\rho} \int_{x_3}^{\xi} \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 \frac{\partial \bar{v}_1 l}{\partial x_3} \\ &\quad - \frac{\partial l}{\partial x_3} \left[v_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \right]_{\pm l/2} \end{aligned}$$

Si, en outre, on suppose en première approximation que la largeur l ne dépend pas de la profondeur (on choisit ainsi des profils rectangulaires), alors l'équation de conservation des moments, intégrée sur la largeur, s'écrit :

$$(9) \quad \frac{\partial \bar{v}_1 l}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1 l}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{v}_1 l}{\partial x_3} = l g \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{l g}{\rho} \int_{x_3}^{\xi} \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 \frac{\partial \bar{v}_1 l}{\partial x_3}$$

5.1.2.- Intégration sur la largeur de l'équation de continuité

Puisque \bar{v}_1 et \bar{v}_3 sont nuls *a priori* sur les berges, l'équation de continuité intégrée s'écrit :

$$(10) \quad \frac{\partial \bar{v}_1 l}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{v}_3 l}{\partial x_3} = 0$$

5.1.3.- Intégration de l'équation de conservation de la masse de sel

Cette fois-ci, $\bar{\rho}_N$ reste constant sur toute la largeur y compris les berges. Nous obtenons donc la relation suivante (simplifiable par ℓ) :

$$(11) \quad \ell \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial t} + \bar{v}_1 \ell \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \ell \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3} = \ell \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_1 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} + \ell \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3}$$

Nous utiliserons donc dorénavant les équations (9), (10) et (11) qui incluent les conditions aux limites sur les berges.

5.1.4.- Remarque sur l'intégration des équations sur la largeur

Si, avant de négliger les variations latérales, nous avons intégré les équations générales sur la largeur, nous aurions obtenu le même résultat avec des hypothèses beaucoup moins restrictives (en particulier sur la vitesse latérale v_2).

On remarquera aussi que nous avons négligé le terme de friction sur les berges. Ce terme, qui intervient dans la loi de conservation des moments, est dix fois plus petit que les autres; il pourra cependant être réintroduit dans l'équation si on veut affiner le modèle.

5.2.- Conditions aux limites en surface

Nous avons déjà utilisé deux conditions aux limites à la surface :

- l'une exprimait que la pression à la surface était égale à la pression atmosphérique;
- l'autre était la condition aux limites sur la vitesse (utilisée pour trouver l'ordre de grandeur de \bar{v}_3) :

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = [\bar{v}_3]_{x_3=\zeta}$$

5.2.1.- Condition sur les forces en surface

Il existe, en surface, une tension de cisaillement τ_s due à la vitesse du vent sur la surface libre. D'après Frankignoul (1971), nous pouvons poser :

$$\tau_s = \rho_a C_{10} U_{10}^2 = [\bar{\rho}(\bar{v}_1 \bar{v}_3 - v_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3})]_{x_3=\zeta}$$

Dans cette équation, C_{10} représente un coefficient qui peut être pris

égal à $1,1 \cdot 10^{-3}$; U_{10} est la vitesse du vent prise à 10 m au-dessus de la surface libre; ρ_a est la masse volumique de l'air.

5.2.2.- Condition sur le flux de sel en surface

Nous dirons qu'il n'existe pas d'échange de sel à travers la surface libre. Cette condition s'écrit :

$$[\lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3} - \bar{v}_3 \bar{\rho}_N]_{x_3=0} = 0 .$$

5.3.- Conditions aux frontières sur le fond

Les vitesses \bar{v}_1 et \bar{v}_3 sont nulles sur le fond, soit

$$[v_1]_{x_3=-h} = [v_3]_{x_3=-h} = 0$$

où h représente la profondeur de l'eau sous le plan fixe de référence $z = 0$; h est une donnée et ne dépend que de x_1 .

5.3.1.- Condition sur les forces au fond

Il existe sur le fond une force de cisaillement τ_b telle que

$$\tau_b = [\bar{\rho}(v_3 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3})]_{x_3=-h} ;$$

d'après Hansen (1962), on peut écrire :

$$\tau_b = r \bar{\rho} \bar{u}_{\text{moy}}^2$$

où \bar{u}_{moy} est la valeur moyenne de \bar{v}_1 sur la profondeur et r un coefficient empirique sans dimension pris égal à $3 \cdot 10^{-3}$.

5.3.2.- Condition sur le flux de sel

Nous écrirons qu'il n'existe pas d'échange de sel entre le fond et l'eau, soit :

$$[\lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3} - \bar{v}_3 \bar{\rho}_N]_{x_3=-h} = 0$$

mais, puisque nous avons pris $[\bar{v}_3]_{x_3=-h} = 0$, alors

$$[\lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3}]_{x_3=-h} = 0 .$$

5.4.- Conditions dans les sections amont et aval

La section amont se trouve située au niveau du déversement du Rupel. La section aval est à l'embouchure.

Nous devons nécessairement considérer comme connus l'ensemble des paramètres dans ces deux sections. Ces valeurs devront donc être mesurées ou encore établies par d'autres modèles mathématiques; par exemple, les paramètres dans la section aval peuvent être donnés par le modèle de la mer du Nord.

Cependant, dans un premier temps, nous pourrions utiliser les valeurs moyennes données par les Travaux Publics d'Anvers dans leur ouvrage *Stormvloed en de Schelde* (1966).

En ce qui concerne les concentrations en sel, dans la section aval comme dans la section amont, elles peuvent être considérées comme constantes. Dans la section amont, située à 120 km de l'embouchure, la concentration en sel garde une valeur très faible (de l'ordre de 2 kg/m^3); à l'embouchure, $\bar{\rho}_N$ peut être pris égal à la salinité dans l'eau de mer.

5.5.- Géométrie de l'Escaut

Pour résoudre nos équations, il convient de délimiter notre domaine d'étude. Nous prendrons, pour la géométrie de l'Escaut, les valeurs utilisées dans le rapport de Smets (1971); nous connaissons ainsi la fonction de x_1 et h fonction de x_1 .

6.- Remarque sur l'écriture des équations simplifiées

En faisant intervenir un potentiel Ψ , l'équation de continuité peut s'écrire :

$$(12) \quad \bar{v}_1 \ell = - \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \quad , \quad \bar{v}_3 \ell = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \quad .$$

De cette façon, nous pouvons découpler l'équation de continuité des autres équations en remplaçant \bar{v}_1 et \bar{v}_3 par des fonctions d'une seule variable Ψ .

Nous pouvons également éliminer une difficulté qui réside dans l'apparition d'un terme sous forme intégrale dans l'équation de conservation des moments; ce terme provenait de l'expression du gradient de pression $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1}$.

Si nous dérivons par rapport à x_3 l'équation (9) et si nous remplaçons \bar{v}_1 et \bar{v}_3 par leur valeur en fonction de Ψ , nous obtenons la relation :

$$(13) \quad -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} \right) + \frac{1}{\ell} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x_1 \partial x_3^2} - \frac{1}{\ell} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x_3^3} = -\frac{\ell g}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left(v_3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_3^2} \right).$$

De même l'équation de conservation de la masse de sel (11) s'écrira :

$$(14) \quad \ell \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3} = \ell \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_1 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_1} + \ell \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_3}.$$

Nous pourrions donc résoudre simultanément les équations (13) et (14), puis, de la valeur de Ψ ainsi trouvée, déduire les valeurs de \bar{v}_1 et \bar{v}_3 à partir des équations (12).

7.- Les variations latérales des paramètres

Nous avons supposé qu'il n'existait pas de variations latérales des paramètres. Dans l'hypothèse où \bar{v}_2 reste toujours négligeable, nous allons évaluer les ordres de grandeur des variations de concentration en sel ou du niveau d'eau d'une rive à l'autre.

La loi de conservation des moments suivant x_2 se réduit à :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} = f \bar{v}_1.$$

Nous avons déduit de l'équation de conservation des moments suivant x_3 la relation :

$$p = p_a - g \int_{x_3}^{\xi} \bar{\rho} dx_3.$$

En dérivant cette équation par rapport à x_2 , nous obtenons :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} = -g \left\{ \int_{x_3}^{\xi} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_2} dx_3 + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} [\bar{\rho}]_{x_3=\xi} \right\}.$$

Par suite, l'équation de conservation des moments suivant x_2 se réduira à

$$f \bar{v}_1 = g \left\{ \frac{1}{\bar{\rho}} \int_{x_3}^{\xi} \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_2} dx_3 + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right\}.$$

f est le facteur de Coriolis et est de l'ordre de 10^{-4} s^{-1} ; \bar{v}_1 est de l'ordre de grandeur de 1 m/s ; par suite, $f \bar{v}_1 \sim 10^{-4} \text{ m/s}^2$.

Pour que l'égalité précédente puisse être respectée, il faut nécessairement que l'un des deux termes du second membre soit du même ordre de grandeur que $f \bar{v}_1$. Cela nous donnera :

1) pour les variations latérales de $\bar{\rho}_N$:

$$\frac{g}{\bar{\rho}} \int_{x_3}^{\xi} \frac{\partial \bar{\rho}_N}{\partial x_2} dx_3 \sim 10^{-4}.$$

Si $\Delta \bar{\rho}_N$ est la variation maximum de la concentration en sel d'une berge à l'autre, nous aurons :

$$\frac{10}{10^3} \frac{\Delta \bar{\rho}_N}{10^3} \times 10 \sim 10^{-4}$$

ou encore

$$\Delta \bar{\rho}_N \sim 1 \text{ kg/m}^3.$$

2) pour la dénivellation de la surface libre entre les deux berges

Si $\Delta \zeta$ représente la dénivellation entre les deux berges, nous déduisons de la relation précédente :

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \sim 10^{-4} \quad \text{ou} \quad 10 \frac{\Delta \zeta}{10^3} \sim 10^{-4}$$

soit $\Delta \zeta \sim 10^{-2} \text{ m}.$

La dénivellation de la surface libre entre les deux berges peut donc être de l'ordre du centimètre. Nous voyons qu'il existe une variation latérale des paramètres due à l'effet de la force de Coriolis. Ce phénomène explique, par exemple, que le courant choisisse un chenal à marée montante et le chenal opposé à marée descendante.

Cependant, les variations suivant la verticale sont beaucoup plus rapides car elles n'ont lieu que sur une distance de 10 m (contre 10^3 m pour les variations latérales).

En outre, les gradients verticaux ont une grande influence sur les phénomènes de remise en suspension et de sédimentation.

Ce sont l'ensemble de ces raisons qui sont à l'origine du choix d'un modèle en x_1 et x_3 .

MOUVEMENT DES SUSPENSIONS DANS L'ESTUAIRE

1.- Equation décrivant le mouvement des suspensions

Comme tous les éléments transportés par l'eau, les matières en suspension obéissent à la loi de conservation de la masse définie dans la première partie.

Si on appelle ρ_{sj} la concentration en suspension des particules j ayant la même vitesse de sédimentation v_{sj} , cette loi s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{sj}}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{\rho}_{sj}}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{\rho}_{sj}}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_1 \frac{\partial \bar{\rho}_{sj}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_{sj}}{\partial x_3} - \nabla \cdot \bar{m}_{sj} + \bar{Q}_{sj} + \sum_{\beta=1}^s \bar{P}_{sj\beta}$$

Nous considérerons qu'il n'existe pas de sources externes ou internes de suspensions dans notre domaine d'étude, soit

$$\bar{Q}_{sj} = \sum_{\beta=1}^s \bar{P}_{sj\beta} = 0.$$

Le vecteur migration \bar{m}_{sj} représente ici le phénomène de sédimentation, il n'aura donc qu'une seule composante suivant x_3 . Cette composante $\bar{m}_{sj,3}$ est le flux de sédimentation. Si v_{sj} représente la vitesse limite de sédimentation, nous aurons la relation :

$$\bar{m}_{sj,3} = v_{sj} \bar{\rho}_{sj}.$$

L'équation de conservation de la masse des suspensions s'écrit donc :

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{sj}}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{\rho}_{sj}}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{\rho}_{sj}}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_1 \frac{\partial \bar{\rho}_{sj}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_{sj}}{\partial x_3} - v_{sj} \frac{\partial \bar{\rho}_{sj}}{\partial x_3}.$$

Pour pouvoir résoudre cette équation, il nous faut définir les conditions aux limites sur $\bar{\rho}_{sj}$.

2.- Conditions aux limites

A chaque extrémité de l'Escaut, les concentrations en sédiments doivent être connues. Nous devons cependant donner les conditions aux deux autres limites, c'est-à-dire à la surface et au fond.

2.1.- Condition à la surface

Les échanges de suspensions entre l'air et l'eau sont négligeables. Nous écrirons donc que le flux vertical de suspensions est nul à travers la surface. Par suite, pour $x_3 = \zeta$, nous aurons la condition :

$$\lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_{sj}}{\partial x_3} - v_{sj} \bar{\rho}_{sj} = 0 .$$

2.2.- Condition au fond

Cette fois, il y a échange entre le fond et l'eau. Il existe d'une part un phénomène de sédimentation (particules passant de l'eau vers le fond) et d'autre part un phénomène de remise en suspension des particules du fond.

D'après Cormault (1971), le phénomène de remise en suspension peut être pris proportionnel à l'expression

$$B_j \left(\frac{u_*^2}{u_{*cj}^2} - 1 \right)$$

où B_j est un coefficient de flux des particules à travers le fond de l'eau, u_* est la vitesse de frottement sur le fond et u_{*cj} est la vitesse critique de frottement pour laquelle les particules se remettent en suspension.

Le phénomène de sédimentation est quant à lui proportionnel au flux arrivant des particules sédimentant, soit proportionnel à

$$[v_{sj} \bar{\rho}_{sj}]_{x_3=-h} .$$

En regroupant ces deux hypothèses, nous arrivons à la condition suivante sur le fond :

$$\left[\lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_{sj}}{\partial x_3} - v_{sj} \bar{\rho}_{sj} \right]_{x_3=-h} = -\gamma [v_{sj} \bar{\rho}_{sj}] + \delta B_j \left(\frac{u_*^2}{u_{*cj}^2} - 1 \right)$$

où γ et δ représentent les facteurs de sédimentation et de remise en suspension.

Il est à remarquer que cette nouvelle expression de la condition sur le fond, qui paraît à première vue semblable à celle donnée par Sayre (1969), est en réalité beaucoup plus logique. En effet, le coefficient β

utilisé par Sayre avait le très grand désavantage de n'être pas sans dimension. Nous avons en effet le flux de remise en suspension pris égal à $\beta \Pi$ où Π était la masse de sédiment par unité de surface, β avait donc la dimension de l'inverse d'un temps. Avec notre nouvelle expression, cet inconvénient disparaît car γ est sans dimension.

Nous remarquerons que cette même expression de la condition sur le fond devra être appliquée dans le modèle des suspensions en mer du Nord.

Examinons les différents facteurs intervenant dans l'équation de condition au fond.

1) Le facteur de dépôt γ sera pris tel que

$$\gamma = 0 \quad \text{pour} \quad u_* > u_{*sj}$$

$$\gamma = 1 \quad \text{pour} \quad u_* \leq u_{*sj}$$

où u_{*s} est la vitesse de frottement critique à partir de laquelle le dépôt est possible.

2) Le facteur de remise en suspension δ sera tel que

$$\delta = 0 \quad \text{pour} \quad u_* < u_{*cj}$$

$$\delta = 1 \quad \text{pour} \quad u_* \geq u_{*cj} .$$

3) Le coefficient de flux des particules B_j dépend de la nature des matériaux (invariant pour un j donné), de l'histoire du matériau (c'est-à-dire du fait que ce matériau est plus ou moins compact, la compacité étant liée à l'âge du dépôt), du milieu fluide recouvrant ce dépôt (c'est-à-dire essentiellement de la salinité de l'eau submergeant ce dépôt).

Cormault (1971) prend $B = 2 \cdot 10^{-5} \text{ g/cm}^2 \cdot \text{s}$ pour $\bar{\rho}_{\text{sédépôt}} = 200 \text{ à } 300 \text{ g/l}$. Il utilise en outre pour u_{*cj} la relation empirique suivante :

$$u_{*cj} = a \bar{\rho}_s + b \bar{\rho}_s^2$$

avec $a = 5,5 \cdot 10^{-3}$ et $b = 2,6 \cdot 10^{-6}$.

Il faut remarquer que cette relation ne respecte pas l'équation aux dimensions. En conséquence, il semble très peu probable qu'elle puisse s'extrapoler au cas de l'Escaut.

3.- Mesures nécessaires

Nous avons vu que la condition aux limites sur le fond nécessitait la connaissance de quatre facteurs :

- la vitesse de sédimentation des particules v_{sj} ,
- le coefficient de flux de remise en suspension B_j ,
- la vitesse critique de remise en suspension u_{*cj} ,
- la vitesse critique de dépôt u_{*sj} .

Chacun de ces facteurs doit donc être mesuré pour chaque type de particule j . Il devient donc tout à fait urgent que les groupes chargés de ces mesures mettent au point des méthodes leur permettant de nous fournir ces renseignements.

Il faut remarquer que les mêmes données sont nécessaires pour résoudre le problème de la dynamique des suspensions en mer du Nord.

MODELE POUR L'OXYGENE DISSOUS DANS L'ESTUAIRE

L'oxygène dissous est un facteur important puisqu'il est une des conditions nécessaires à la vie d'un grand nombre d'organismes (poissons, vers, algues, bactéries aérobies, etc.).

Nous disposons déjà, pour l'Escaut, d'un modèle à une dimension établi par Smetz (1971). Cependant, notre étude du champ des vitesses suivant x_1 et x_3 nous permet de passer à la description de la teneur en oxygène dissous suivant la verticale.

1.- Equation définissant la teneur en oxygène dissous

Si nous appelons ρ_{0_2} la concentration en oxygène dissous, nous pourrions écrire, comme pour les sédiments ou le sel, la loi de conservation de la masse d'oxygène :

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{0_2}}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{\rho}_{0_2}}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{\rho}_{0_2}}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_1 \frac{\partial \bar{\rho}_{0_2}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_{0_2}}{\partial x_3} - \nabla \cdot \bar{\mathbf{m}}_{0_2} + \bar{Q}_{0_2} + \sum_{\beta=1}^S \bar{P}_{0_2\beta}$$

Examinons successivement les trois derniers termes de cette équation.

1) Le vecteur migration $\bar{\mathbf{m}}_{0_2}$

L'oxygène contenu dans l'eau étant à l'état dissous, il ne possède pas de mouvement propre. Par suite, le vecteur migration est nul.

2) Les sources externes \bar{Q}_{0_2}

Il n'existe pas de sources externes d'oxygène autres qu'à la surface libre où a lieu le phénomène de réaération. Dans l'eau, nous prendrons donc $\bar{Q}_{0_2} = 0$.

3) Les sources internes $\sum_{\beta=1}^S \bar{P}_{0_2\beta}$

Il existe deux sortes de sources internes : celles dues aux bactéries et celles dues aux algues.

a) Consommation d'oxygène par les bactéries

L'oxygène dissous dans l'eau est consommé par les bactéries aérobies au cours des réactions de biodégradation des substances organiques.

Nous définissons ρ_L comme la demande biologique en oxygène (DBO_∞) c'est-à-dire la quantité d'oxygène nécessaire à la biodégradation totale des matières organiques présentes dans l'unité de volume d'eau. Nous obtenons ainsi un équivalent en poids d'oxygène par unité de volume d'eau de la concentration en matières organiques dissoutes dans l'eau.

La vitesse de consommation d'oxygène par ces bactéries est proportionnelle à la DBO_∞ de l'eau qui les contient. Par suite

$$\bar{P}_{O_2\beta} = K_1 \bar{\rho}_L$$

où K_1 représente la vitesse de biodégradation, K_1 dépend de la température de l'eau et de la nature de la charge contenue dans l'eau.

b) Consommation et production d'oxygène par les algues

Les algues et d'autres organismes consomment de l'oxygène pour leur respiration; cette consommation est constante dans le temps pour chaque individu. Les algues, en outre, produisent de l'oxygène par photosynthèse; cette production est une fonction de l'intensité lumineuse et de la turbidité qui limite la zone euphotique.

Devant l'importance des phénomènes de mélange et devant la grande quantité de matières organiques contenues dans l'eau, nous négligerons la respiration et la photosynthèse. L'équation de conservation de la quantité d'oxygène s'écrira donc :

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{O_2}}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{\rho}_{O_2}}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{\rho}_{O_2}}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_1 \frac{\partial \bar{\rho}_{O_2}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_{O_2}}{\partial x_3} - K_1 \bar{\rho}_L$$

Dans cette équation apparaît la charge $\bar{\rho}_L$. Il nous est donc nécessaire de définir sa variation.

2.- Equation définissant la charge organique $\bar{\rho}_L$ de l'eau

L'équation de conservation de la masse de la charge organique est semblable à celle définie pour tous les éléments de l'eau. Examinons donc les vecteurs migration, les sources internes et les sources externes de charge.

1) Le vecteur migration \bar{m}_L

Une partie de la charge organique est entraînée par les particules sédimentant. Si nous appelons r la DBO par gramme de matières solides

en suspension (donc un poids d'oxygène par poids de suspension), nous pourrions écrire le vecteur migration sous la forme

$$\bar{m}_L = (0, 0, \bar{m}_{L,3}) = (0, 0, v_{sL} \bar{\rho}_{sL} r)$$

où v_{sL} représente la vitesse de sédimentation des suspensions contenant des matières organiques et où $\bar{\rho}_{sL}$ est la concentration de ses suspensions dans l'eau.

2) Les sources externes \bar{Q}_L

Ce sont les apports extérieurs de charge organique dus aux déversements ou rejets d'eaux usées. Le terme \bar{Q}_L est une donnée fonction de x_1 .

3) Les sources internes $\sum_{\beta=1}^s \bar{P}_{L\beta}$

Nous avons vu précédemment que les bactéries aérobies dégradent les matières organiques. Puisque nous avons exprimé la charge en équivalent oxygène, nous aurons la relation

$$\bar{P}_{L\beta} = -K_1 \bar{\rho}_L.$$

L'équation définissant la charge organique $\bar{\rho}_L$ dans l'eau sera donc

$$\frac{\partial \bar{\rho}_L}{\partial t} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{\rho}_L}{\partial x_1} + \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{\rho}_L}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda_1 \frac{\partial \bar{\rho}_L}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_L}{\partial x_3} - v_{sL} \frac{\partial \bar{\rho}_{sL}}{\partial x_3} r + \bar{Q}_L$$

Nous devons à présent définir les conditions aux limites.

3.- Conditions aux limites

Nous avons des conditions aux limites sur $\bar{\rho}_{O_2}$ et $\bar{\rho}_L$.

1) En surface

a) Condition en surface pour $\bar{\rho}_{O_2}$

Il y a échange d'oxygène entre l'air et l'eau à travers la surface. La diffusion de l'oxygène de l'air dans l'eau se fait suivant la loi de Fick. Pour $x_3 = \zeta$, nous avons donc la condition :

$$\frac{\partial \bar{\rho}_{O_2}}{\partial t} = K_2 (\bar{\rho}_{O_2,s} - \bar{\rho}_{O_2})$$

où $\bar{\rho}_{O_2,s}$ représente la concentration d'oxygène à la saturation dans l'eau et où K_2 est le coefficient de réaération.

b) Condition en surface pour $\bar{\rho}_L$

Il n'y a pas d'échange de charge entre l'air et l'eau. Par suite, pour $x_3 = \zeta$, nous aurons

$$\lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_L}{\partial x_3} - v_{sL} \bar{\rho}_L r = 0 .$$

2) Au fond

a) Condition au fond pour $\bar{\rho}_{O_2}$

Les sédiments déposés sur le fond se dégradent par voie biologique. Si nous appelons K'_1 la constante de biodégradation des boues sur le fond, nous pourrions écrire que le flux d'oxygène à travers le fond est égal à la consommation d'oxygène par les boues, soit

$$\lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_{O_2}}{\partial x_3} = - K'_1 \mathcal{L}_0$$

où \mathcal{L}_0 représente la demande biologique en oxygène des boues par unité de surface du fond.

b) Condition au fond pour $\bar{\rho}_L$

Le flux de charge à travers le fond est dû au dépôt sur le fond et à la remise en suspension des sédiments contenant des matières organiques. Le dépôt a été caractérisé par le terme $\gamma v_{sL} \bar{\rho}_{sL}$ pour les suspensions, il sera donc égal à $\gamma v_{sL} \bar{\rho}_{sL} r$ pour la charge. La remise en suspension avait été prise égale à

$$\delta B_L \left(\frac{u_*^2}{u_{*c}^2} - 1 \right)$$

pour les sédiments. Si nous définissons q comme la DBO rapportée au poids de sédiments, alors la remise en suspension de la charge sera égale à

$$\delta B_L \left(\frac{u_*^2}{u_{*c}^2} - 1 \right) q .$$

La condition sur le fond s'écrit donc

$$\lambda_3 \frac{\partial \bar{\rho}_L}{\partial x_3} - v_{sL} \bar{\rho}_{sL} r = - \gamma v_{sL} \bar{\rho}_{sL} r + \delta B_L \left(\frac{u_*^2}{u_{*c}^2} - 1 \right) q .$$

4.- Mesures nécessaires

Tous les paramètres intervenant dans cette équation doivent être mesurés.

Smetz (1971) indique des valeurs pour les coefficients K_1 et K_2 qui pourront servir de base pour les premiers calculs; il reste néanmoins à déterminer les facteurs K'_1 , r et q .

DISCUSSION

La première étape va maintenant consister en la résolution du système d'équations décrivant le champ des vitesses dans l'estuaire. Etant donné la complexité du problème (il s'agit d'équations aux dérivées partielles non linéaires), on choisira de les traiter par calculateurs hybrides car ceux-ci offrent une exploitation plus souple.

Il faudra également comparer les différentes formulations empiriques des diffusivités turbulentes et viscosités turbulentes. La première approche pourra être telle que λ_1 et ν_1 soient proportionnels à v_1 et λ_3 et ν_3 soient inversement proportionnels à λ_1 et ν_1 ou encore soient proportionnels à v_3 .

L'expression de la tension de cisaillement sur le fond, représentée également par une relation empirique, devra pouvoir être affinée. Il semble, par exemple, qu'une relation donnant une proportionnalité de τ_b avec le carré de la vitesse près du fond serait plus réaliste que celle proposée par W. Hansen (1962). En effet, dans un estuaire, la vitesse moyenne sur la profondeur peut très bien être nulle alors que la vitesse près du fond resterait importante. On conçoit alors que les forces exercées sur le fond pourraient être importantes alors que la relation donnée par W. Hansen indiquerait une valeur nulle pour τ_b .

Le champ des vitesses connu, nous pourrions alors aborder la résolution des équations décrivant la dynamique des suspensions.

L'équation décrite dans la seconde partie (modèle des suspensions) est semblable à celle utilisée pour le sel à la différence près qu'intervient un vecteur de migration verticale.

La mesure *in situ* de la vitesse de sédimentation reste donc un problème particulièrement important à résoudre. Une solution telle que celle proposée par Mc Owen (1971) et consistant en l'utilisation d'un grand cylindre formant à la fois colonne de sédimentation et bouteille de prélèvement est très séduisante. Mc Owen indique d'ailleurs les très grandes erreurs qu'introduisent les mesures *a posteriori* sur échantillons traités en laboratoire (ces valeurs sont jusqu'à dix fois plus petites que les grandeurs réelles).

Quant au modèle d'oxygène dissous, il est sans doute beaucoup moins urgent de l'expliciter. En effet, la variation d'oxygène dissous sur la verticale ne semble pas être un facteur très important à connaître. Le modèle établi par E. Smetz (1971) donne déjà une très bonne approche de la répartition longitudinale de l'oxygène dissous dans l'Escaut.

Il est cependant intéressant de voir apparaître le phénomène de diffusion de l'air dans l'eau, non plus comme un terme de l'équation intégrée sur la profondeur, mais comme une condition à la surface. Il est donc tout à fait probable que le coefficient de réoxygénation K_2 utilisé dans le modèle à deux dimensions ne dépendra plus de la profondeur d'eau.

Il aurait été possible d'établir en outre un modèle de la silice dissoute dans l'eau. Ce modèle aurait comporté un terme de source interne proportionnel à la croissance des diatomées dans la zone euphotique. Cette croissance est sans doute une fonction exponentielle du temps, mais elle doit aussi être reliée à la luminosité dans l'eau ainsi qu'à certaines caractéristiques physico-chimiques de l'eau (salinité, pH, alcalinité, turbidité, oxygène dissous, etc.). Etant donné le manque d'informations dont nous disposons sur le comportement des diatomées, nous préférons, plutôt que de donner un modèle trop général, remettre à plus tard l'écriture des lois définissant les concentrations en silice dans l'Escaut.

Cependant, la silice dissoute étant un élément limitant important [cf. Wollast (1970)], il conviendrait d'examiner à travers un groupe d'étude pluridisciplinaire les mesures et études nécessaires à la détermination des facteurs intervenant dans l'évolution de la silice dans l'estuaire de l'Escaut.

Bibliographie

- BOWDEN (K.F.), (1967). *Circulation and diffusion in Estuaries*, G.H. Lauff (ed.), Am. Ass. Adv. Sci., Washington D.C., publ. 83, pp. 15-36.
- CARTER (H.H.) and OKUBO (A.), (1970). *Longitudinal dispersion in non uniform flow*, The John Hopkins University, Technical Report, 68, reference 70-8.
- CODDE, (1968). Het verloop van het zoutgehalte in de zeeschelde, in *Revue C. Tijdschrift*, I, pp. 1-6.
- CORMAULT (P.), (1971). *Détermination expérimentale du débit solide d'érosion de sédiments fins cohésifs*, 14ème Congrès de l'A.I.R.H., IV, sujet D, Paris, pp. 9-16.
- EDELIN (F.), (1966). *Le pouvoir autoépurateur des rivières* in *Le livre de l'Eau*, vol. V, CEBEDEAU (ed.), Liège, pp. 222-296.
- FEIGNER (K.D.) and HARRIS (H.S.), (1970). *Dynamics in estuary model*, F.W.Q.A., Doc. report, pp. 1-248.
- FISHER (H.B.), (1972). Mass transport in partially stratified estuaries, *J. Fluid. Meca.*, 53, part 4, 671-687.
- FRANKIGNOUL (C.J.), (1971). *Preliminary report on air sea interaction*, Programme national belge sur l'environnement physique et biologique, n° 7.
- HANSEN (D.V.), (1967). *Salt balance in partially mixed estuaries* in *Estuaries, physical factors*, E.H. Lauff (ed.), Am. Ass. Adv. Sci., Washington, D.C., publ. 83, pp. 45-51.
- HANSEN (W.), (1962). *Tides in The Sea*, vol. I, M.N. Hill (ed.), Interscience, pp. 765-801.
- HARLEMAN, (1971). *One dimensional models in Estuarine Modelling*, Tracor Inc. for the Water Quality Office, Water pollution control research, serie 16070 DZV, Washington, D.C., pp. 34-84.
- MIGNOT, (1968). Etude des propriétés physiques des différents sédiments très fins et leur comportement sous des actions hydrodynamiques, *La Houille Blanche*, 23, n° 7, pp. 595-620.
- NIHOUL (J.C.J.), (1970). *Mécanique des fluides non homogènes*, notes de cours.
- NIHOUL (J.C.J.), (1972). *Hydrodynamical and biochemical state variables and evolution equations for the mathematical modelling of sea pollution*, Proc. Third Liège Coll. on Ocean Hydrodynamics, pp. 111-123.

- OWEN (M.W.), (1971). *The effect of turbulence on the settling velocities of silt flocks*, 14ème Congrès de l'A.I.R.H., IV, sujet D, Paris, pp. 27-32.
- PRITCHARD (D.W.) and CARPENTIER (J.H.), (1960). *Measurement of turbulent diffusion in estuarine and inshore waters*, Symposium on Tidal Rivers, Helsinki.
- PRITCHARD (D.W.), (1969). Dispersion and flushing in estuaries, *J. of Hydraulics Division*, 95, n° HY1, pp. 116-124.
- PRITCHARD (D.W.), (1971). *Two dimensional models in Estuarine Modelling*, Tracor Inc. for the Water Quality Office, Water pollution control research, serie 16070 DZV, Washington, D.C., pp. 22-33.
- RAMMING (H.G.), (1972). *Hydrodynamical numerical investigations and horizontal dispersion of seston in the river Elbe*, Proc. Third Liège Coll. on Ocean Hydrodynamics, pp. 181-208.
- RAMMING (H.G.), (1971). *Hydrodynamisch numerische Untersuchungen über Stromungsabhängige horizontalausbreitungen in Modellflüssen mit Anwendungen auf die Elbe*, Thèse de doctorat, Université de Hambourg.
- SAYRE, (1969). Dispersion of soft particules in open Channel flow, *J. of Hydraulics Division*, May 1969, pp. 1010-1038.
- SMETZ (E.), (1971). *De hydrodynamische aspecten in de studie van de verontreiniging der oppervlakte wateren*, Waterbouwkunding Laboratorium, Borgerhout-Antwerpen.
- STORMVLOEDEN OP DE SCHELDE, (1966). Ministerie van openbare werken, Bestuur der waterwegen, vol. II, IV et V.
- WOLLAST (R.) and DE BROEU (F.), (1971). Study of the behavior of dissolved silica in the estuary of the Sheldt, *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 35, Pergamon Press, pp. 613-620.